# Dossier n°51 : Exemples d'étude de situations issues de la géométrie, de la mécanique ou de la physique, conduisant à des courbes paramétrées

*Rédigé par Cécile COURTOIS, le*
*cecile-courtois@wanadoo.fr*

## I Situation par rapport aux programmes.

L'étude des courbes paramétrées était au programme de Terminale S, enseignement obligatoire dans les anciens programmes.

Je choisis donc de situer ce dossier au niveau de la Terminale S, anciens programmes.

## II Commentaires généraux.

### II.1 A propos du sujet.

Comme leur nom l'indique, les courbes paramétrées dépendent d'un paramètre, comme le suggère la définition suivante :

*Définition 1 :*

Soient deux fonctions numériques f et g définies sur un même intervalle I.

L'ensemble $\mathcal{C}$ des points M de coordonnées (f(t) ; g(t)) où $t \in I$ est **une courbe paramétrée** dont **une représentation paramétrique** est :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad t \in I$$

La variable t est appelée **paramètre**.

Les courbes paramétrées vont donc constituer un outil pratique dans la résolution de problèmes comportant un élément variable.

C'est très souvent le cas en physique ou en mécanique, quand il s'agit d'étudier les trajectoires de points mobiles mais également en géométrie.

C'est aussi le cas dans la recherche de lieux géométriques.

Le but de ce dossier est donc de présenter des problèmes de physique, de mécanique ou encore de géométrie dont la résolution passe par l'étude d'une courbe paramétrée.

### II.2 A propos des exercices.

J'ai donc choisi, pour illustrer ce dossier, de vous présenter trois exercices issus de trois situations différentes :

- l'exercice n°1 propose la recherche d'un lieu géométrique ;
- l'exercice n°2 propose d'étudier la trajectoire des points d'un bâton en mouvement ;
- l'exercice n°3 propose d'étudier la trajectoire d'un point d'un cercle roulant dans un autre.

Ces trois exercices ont une méthode de résolution commune :

- réaliser une figure ;
- choisir un paramètre ;
- exprimer les coordonnées du point M de la courbe en fonction de t : M(f(t) ; g(t)) ;
- étudier les fonctions f et g ;

- construire la courbe.

En particulier, lors de cette construction, on s'intéressera aux tangentes via la définition suivante :

*Définition 2 :*

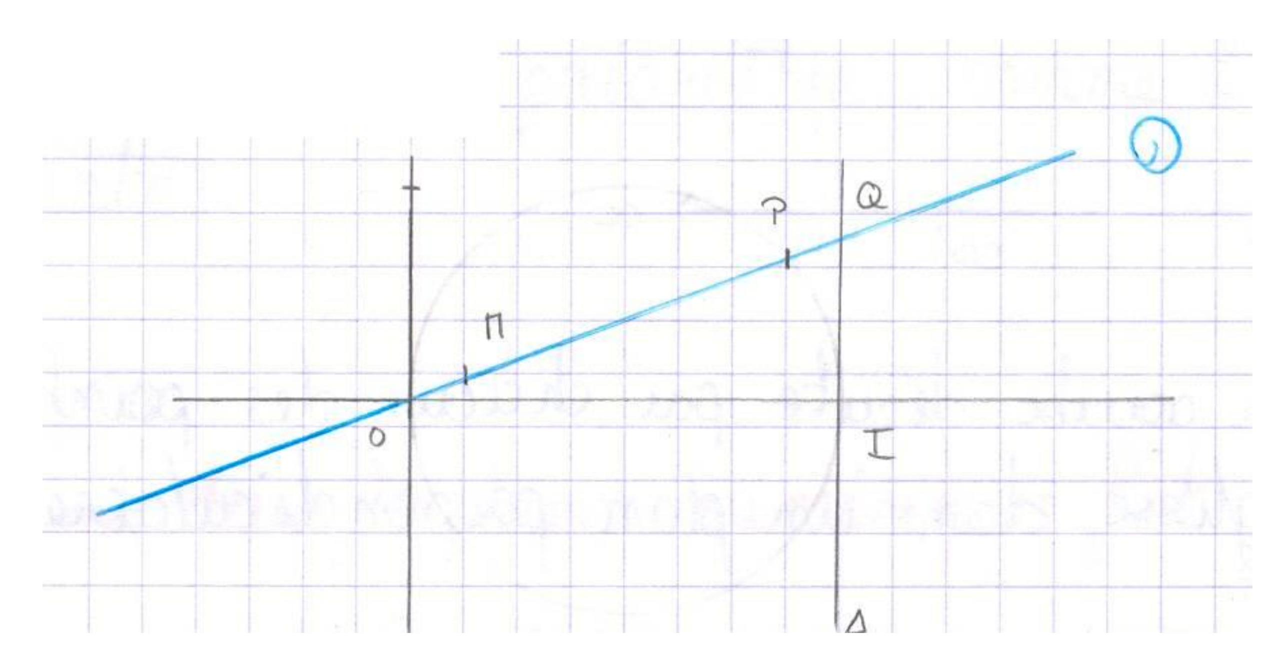
Soit $\mathcal{C}$ une courbe paramétrée : $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ $t \in$ I. Soit $M_0(t_0)$ ($t_0 \in$ I) un point de $\mathcal{C}$. Si :

- f et g sont dérivables en $t_0$ ;
- le vecteur $\vec{v}(t_0) = f'(t_0)\,\vec{i} + g'(t_0)\,\vec{j}$ n'est pas nul ;

alors la droite passant par le point $M(t_0)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(t_0)$ est **la tangente à $\mathcal{C}$ au point $M(t_0)$**.

# III Présentation des exercices.

## III.1 Exercice n°1.




*But :* Déterminer le lieu $\Gamma$ des points M lorsque $\mathcal{D}$ varie.

*Méthode :*

- Montrer que (Ox) est un axe de symétrie de $\Gamma$ ;
- Choix du paramètre : pente de la droite $\mathcal{D}$ ;
- Méthode de résolution commune.

*Outils :*

- Symétries axiales ;
- Equations cartésiennes d'une droite et d'un cercle ;
- Lien entre le signe de la dérivée et la monotonie d'une fonction.

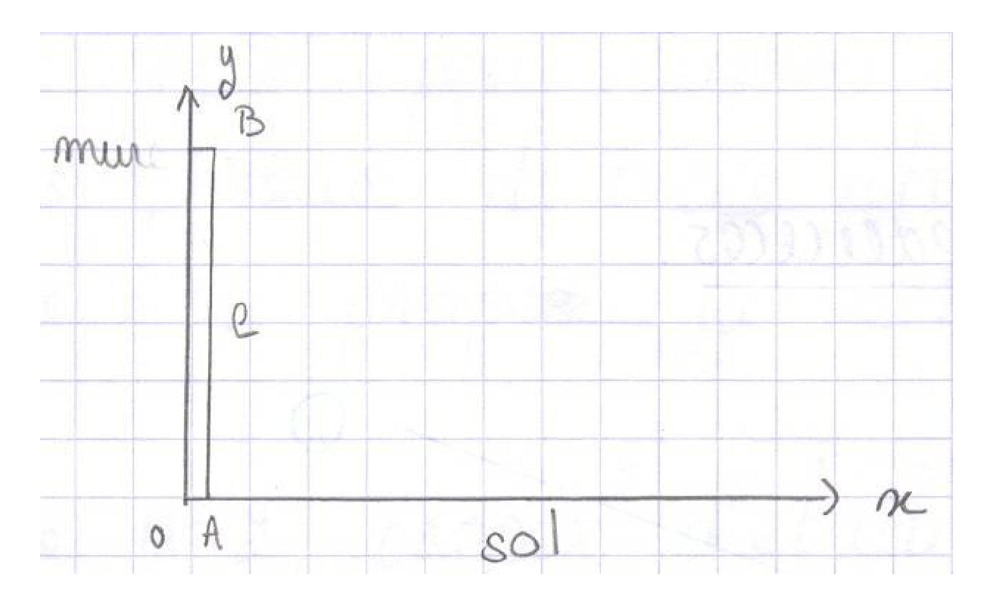
*Remarque :*

Dans les programmes, l'existence d'une tangente n'est définie que dans le cas où le premier vecteur dérivé est non nul.

Ici, le premier vecteur dérivé est nul est M(0) mais il existe toutefois une tangente dont nous admettrons l'existence.

La courbe obtenue est **la cissoïde de Dioclès**.

## III.2 Exercice n°2.




*But :* Etudier la courbe décrite par chacun des points du bâton lorsqu'il glisse dans un plan perpendiculaire au mur et au sol, A et B restant en contact permanent respectivement avec le sol et le mur.

*Méthode :*
- Etude du cas particulier de A et B ;
- Choix du paramètre : angle ( $\overrightarrow{AB}$ , $-\vec{i}$ ) ;
- Méthode de résolution commune.

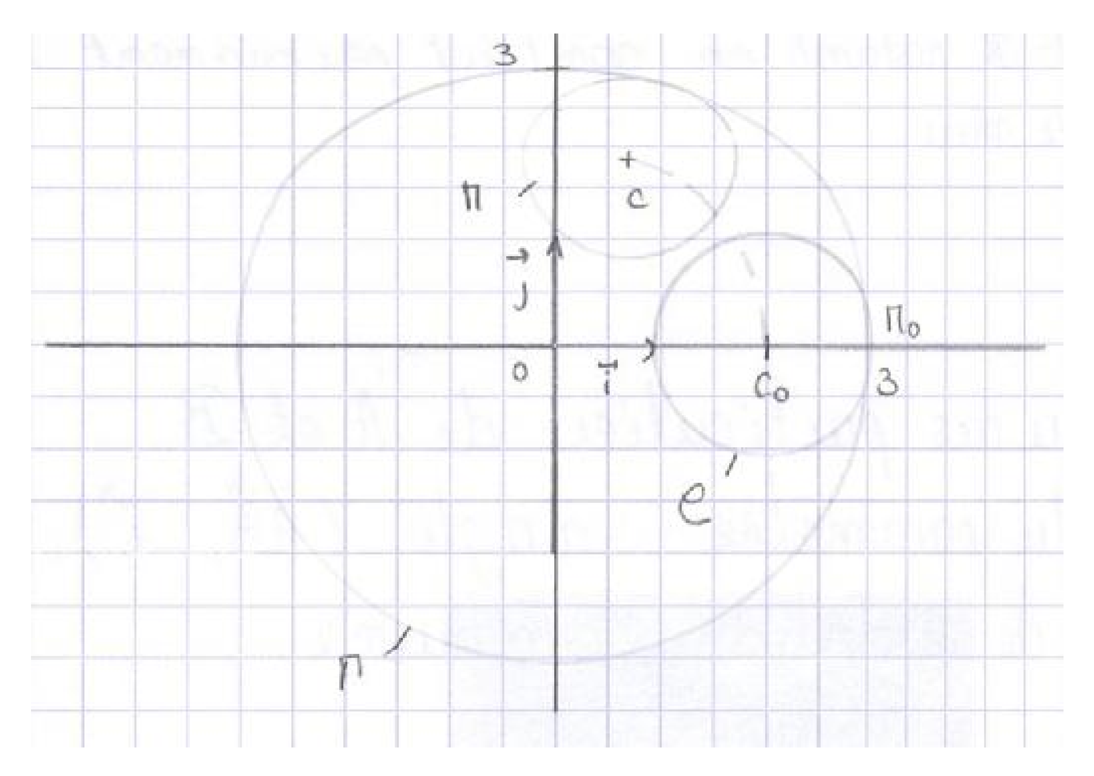
*Outils :*
- Relation de Chasles pour les vecteurs ;
- Trigonométrie.

*Remarque :*
La trajectoire du point M dépend naturellement de sa position sur la bâton. Il conviendra donc d'expliquer aux élèves qu'il s'agit ici, pour le choix du paramètre, d'étudier la position lors du glissement et non pas lorsque M varie sur le bâton.

Lorsque M est distinct de A et B, les trajectoires obtenues sont **des quarts d'ellipses**.

## III.3 Exercice n°3.

*But :* Déterminer la trajectoire d'un point M d'un cercle $\mathcal{C}$ roulant sans glisser à l'intérieur d'un cercle fixe $\Gamma$.




*Méthode :*

- Choix du paramètre : ($\vec{i}$ ; $\overrightarrow{OC}$) avec C centre de C ;
- Méthode de résolution commune.

Outils :

- Relation de Chasles pour les angles de vecteurs ;
- Formules trigonométriques ;
- Si f et g sont 2π périodiques, alors on peut restreindre l'intervalle d'étude à un intervalle de longueur 2π (ici [-π ; π]) ;
- Si f est paire et g impaire, alors (Ox) est un axe de symétrie de C et on peut restreindre l'intervalle d'étude à [0 ; π].

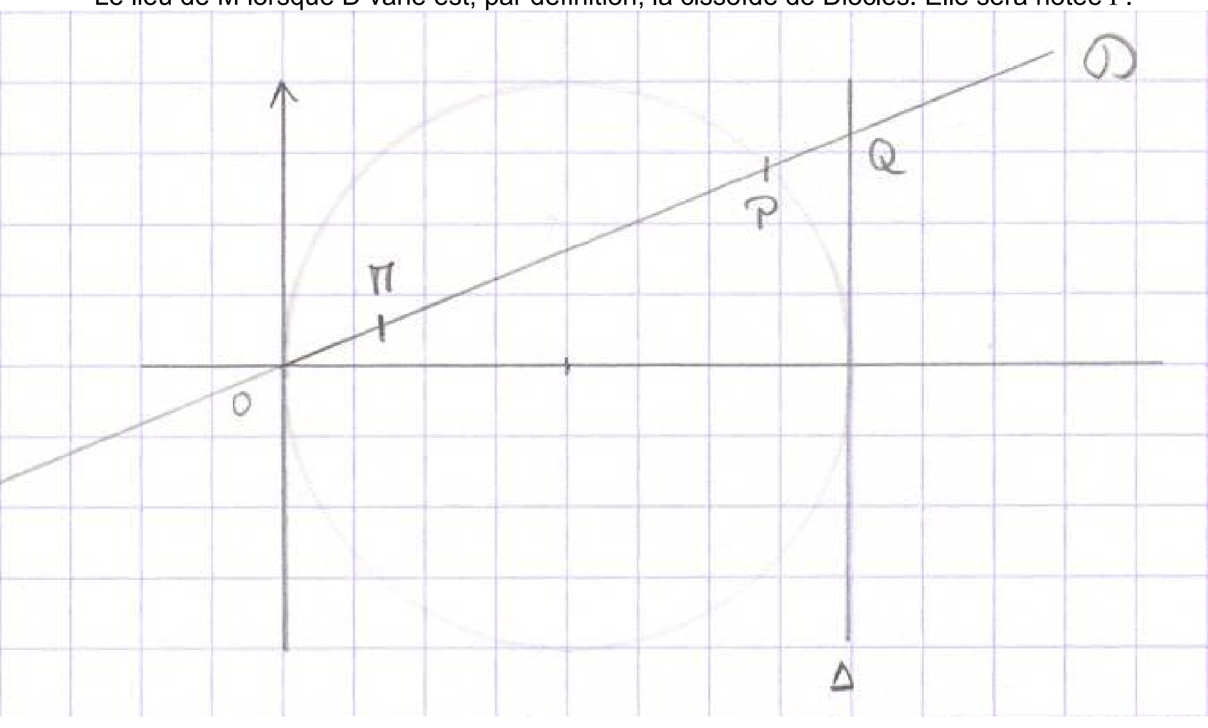
La courbe obtenue est appelée **deltoïde**.

# IV Enoncés et références des exercices.

## IV.1 Exercice n°1 (n°2 p 318 et n°72 p 335, Terracher TS 1998).

Dans un repère orthonormal (O, I, J), on considère le cercle C de diamètre [OI] et $\Delta$ la tangente en I à C. Une droite variable D passant par O coupe C en P et $\Delta$ en Q. On définit le point M par l'égalité $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{PQ}$.

Le lieu de M lorsque D varie est, par définition, la cissoïde de Dioclès. Elle sera notée $\Gamma$.




1. Montrer que (Ox) est un axe de symétrie de $\Gamma$.
2. Soit t la pente de D. Montrer que les coordonnées x(t) et y(t) de M sont données par $x(t) = \dfrac{t^2}{1+t^2}$ et $y(t) = \dfrac{t^3}{1+t^2}$.
3. Etudier les variations de $t \to x(t)$ et $t \to y(t)$ pour t positif ou nul.
4. On admet la présence d'une tangente parallèle à (Ox) en M(0). Construire $\Gamma$.

## IV.2 Exercice n°2 (TP2 p 326, Terracher TS 1998).

Un bâton d'extrémités A et B, de longueur $l$ et de bois dur repose initialement le long d'un mur vertical. Pour une mystérieuse raison, il glisse dans un plan perpendiculaire au mur et au sol, ses extrémités A et B restant en contact permanent respectivement avec le sol et le mur jusqu'à l'horizontale. On souhaite étudier la courbe décrite par chacun des points du bâton.

1. Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère othonormal du plan de la trajectoire tel qu'au début de l'expérience, A soit en O et B sur (Oy). Représenter la trajectoire de A et B dans ce repère.
2. Soit M un point du bâton distinct de A et B. on pose BM = a, AM = b. Soit t l'angle $(\overrightarrow{AB}, -\vec{i})$. Vérifier que $a + b = l$ et $t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
3. En utilisant la relation de Chasles, montrer que M a pour coordonnées (a cos t ; b sin t).

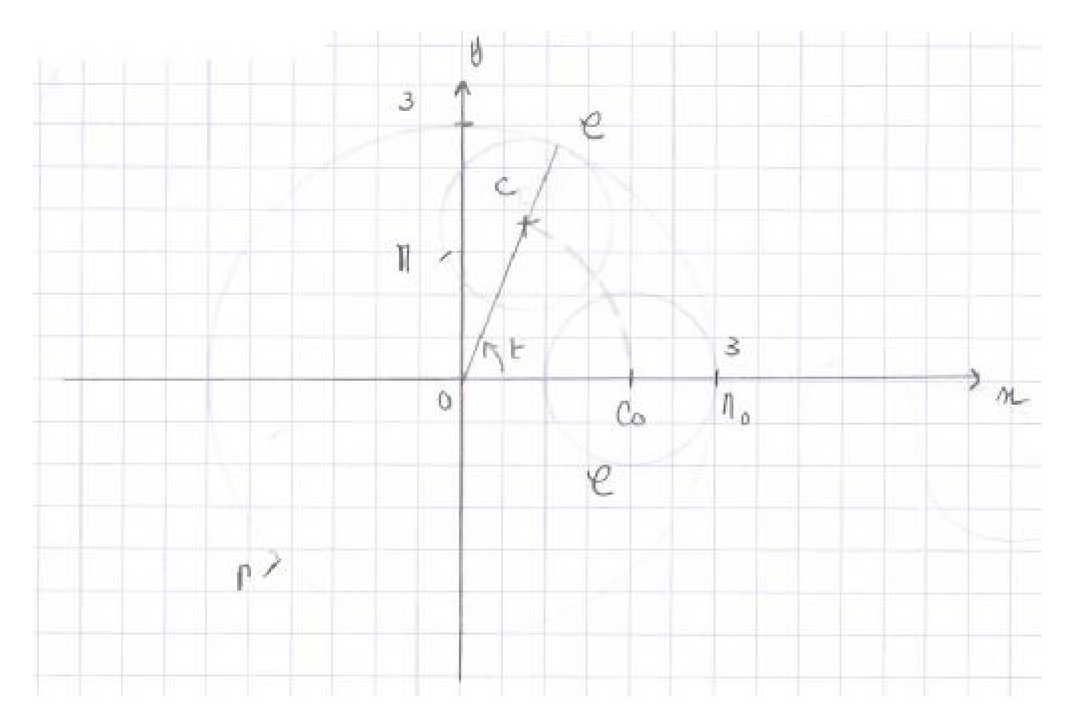
4. Etudier les variations de x : t → a cos t et y : t → b sin t sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Préciser les tangentes en M(0) et M$\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

5. Construire Γ dans les cas suivants :

(i) $a = \frac{l}{2}$ ; (ii) $a = \frac{l}{6}$ ; (iii) $a = \frac{5l}{6}$ ; (iv) $a = \frac{l}{4}$ ;

## IV.3 Exercice n°3 (n°76 p 337, Terracher TS 1998).

Soit, dans un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$), un cercle fixe Γ de centre O et de rayon 3. C est un cercle variable de rayon 1 qui roule dans glisser à l'intérieur de Γ. On se propose de déterminer le lieu géométrique $\mathcal{L}$ d'un point M de $\mathcal{C}$ pendant le mouvement (on suppose que M coïncide avec $M_0(3 ; 0)$ lorsque $\mathcal{C}$ est en contact avec Γ en $M_0$).




1. Soit C le centre de $\mathcal{C}$ et t = ($\vec{i}$ ; $\overrightarrow{OC}$).
   a) Montrer que $\overrightarrow{OC} = 2\cos t\ \vec{i} + 2\sin t\ \vec{j}$.
   b) Exprimer ($\vec{i}$ ; $\overrightarrow{CM}$) en fonction de t. En déduire que $\mathcal{L}$ admet la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos(t) + \cos(2t) \\ y(t) = 2\sin(t) - \sin(2t) \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

2. a) Comparer M(t) et M(t+2π). Que peut-on en déduire ?

b) Comparer M(t) et M(-t). Que peut-on en déduire ?

c) Etudier les variations de t → x(t) et t → y(t) sur [0 ; π].

d) Construire $\mathcal{L}$ en admettant qu'en M(0) et M$\left(\frac{\pi}{2}\right)$ il y a une tangente dirigée vers l'origine.